Matemáticas I
Integrales

Javier Pérez González

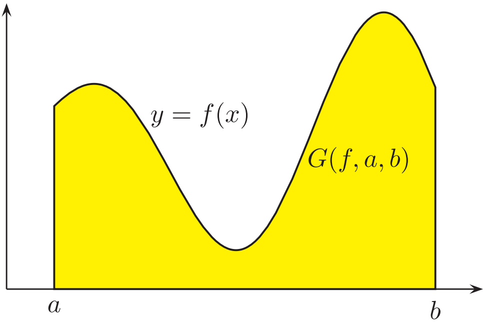
Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

November 11, 2014

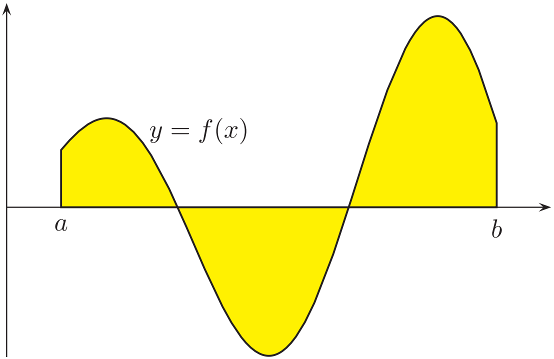
Conjunto limitado por una gráfica

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ notaremos por $G(f, a, b)$ el conjunto limitado por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = a$, $x = b$.

Conjunto limitado por una gráfica



Conjunto limitado por una gráfica



Partición de un intervalo

Queremos dar una definición matemática del área de dicho conjunto.

Queremos dar una definición matemática del área de dicho conjunto.

Para ello, primero se divide el intervalo $[a, b]$ en un número finito de subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $1 \leqslant k \leqslant n$, cuyas longitudes pueden ser distintas y con la única condición de que no se solapen:

Queremos dar una definición matemática del área de dicho conjunto.

Para ello, primero se divide el intervalo $[a, b]$ en un número finito de subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $1 \leqslant k \leqslant n$, cuyas longitudes pueden ser distintas y con la única condición de que no se solapen:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Partición de un intervalo

Queremos dar una definición matemática del área de dicho conjunto.

Para ello, primero se divide el intervalo $[a, b]$ en un número finito de subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $1 \leqslant k \leqslant n$, cuyas longitudes pueden ser distintas y con la única condición de que no se solapen:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Se dice que estos puntos constituyen una **partición** de $[a, b]$.

A continuación se elige en cada subintervalo un punto $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, y se forma el rectángulo cuya base es el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y altura igual a $f(t_k)$.

Sumas de Riemann

A continuación se elige en cada subintervalo un punto $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, y se forma el rectángulo cuya base es el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y altura igual a $f(t_k)$.

El número

$$\sigma(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

A continuación se elige en cada subintervalo un punto $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, y se forma el rectángulo cuya base es el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y altura igual a $f(t_k)$.

El número

$$\sigma(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

se llama una suma de Riemann de f para la partición $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$.

Interpretación de las sumas de Riemann

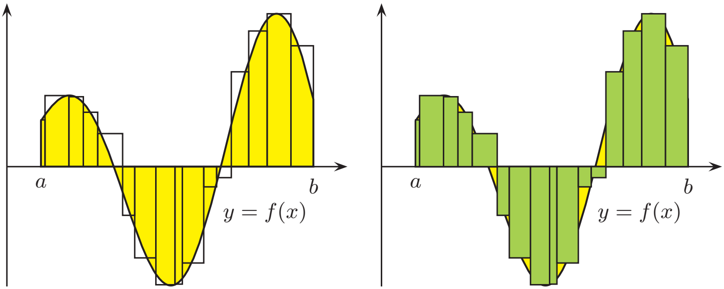
Cuando la función f es positiva y los intervalos de la partición son todos pequeños, las sumas de Riemann son una buena aproximación del área del conjunto $G(f, a, b)$.

Interpretación de las sumas de Riemann

Cuando la función f es positiva y los intervalos de la partición son todos pequeños, las sumas de Riemann son una buena aproximación del área del conjunto $G(f, a, b)$.

Cuando la función f toma valores positivos y negativos las sumas de Riemann son una aproximación del área de la parte de $G(f, a, b)$ que está en el semiplano superior (donde f es positiva) menos el área de la parte de $G(f, a, b)$ que está en el semiplano inferior (donde f es negativa).

Interpretación de las sumas de Riemann



Dada una partición $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$, definamos

$$M_k = \sup f[x_{k-1}, x_k], \qquad m_k = \inf f[x_{k-1}, x_k]$$

Sumas superior e inferior

Dada una partición $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$, definamos

$$M_k = \sup f[x_{k-1}, x_k], \qquad m_k = \inf f[x_{k-1}, x_k]$$

Los números

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}), \quad I(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

se llaman, respectivamente, **suma superior** y **suma inferior** de f para la partición P.

- Puesto que para todo $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ es $m_k \leqslant f(t_k) \leqslant M_k$, deducimos que para toda suma de Riemann, $\sigma(f, P)$, de f para la partición P se verifica que $I(f, P) \leqslant \sigma(f, P) \leqslant S(f, P)$.

- Puesto que para todo $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ es $m_k \leqslant f(t_k) \leqslant M_k$, deducimos que para toda suma de Riemann, $\sigma(f,P)$, de f para la partición P se verifica que $I(f,P) \leqslant \sigma(f,P) \leqslant S(f,P)$.
- Para cada partición hay una única suma superior y otra inferior.

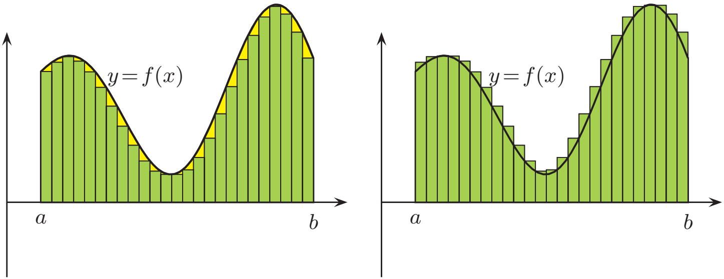
- Cuando f *es positiva* y las longitudes de todos los subintervalos de la partición son suficientemente pequeñas, el número $S(f,P)$ es un *valor aproximado por exceso* del área de la región $G(f,a,b)$, y el número $I(f,P)$ es un *valor aproximado por defecto* del área de la región $G(f,a,b)$.

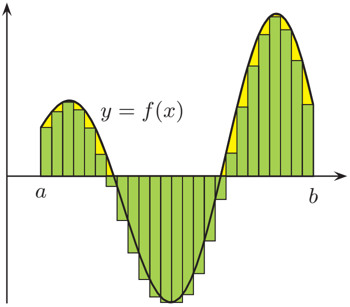
Interpretación de las sumas superior e inferior

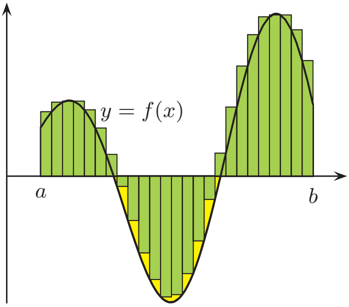
- Cuando f *es positiva* y las longitudes de todos los subintervalos de la partición son suficientemente pequeñas, el número $S(f, P)$ es un *valor aproximado por exceso* del área de la región $G(f, a, b)$, y el número $I(f, P)$ es un *valor aproximado por defecto* del área de la región $G(f, a, b)$.

- Cuando la función f toma valores positivos y negativos, el número $S(f, P)$ es un *valor aproximado por exceso* del área de la parte de $G(f, a, b)$ que está en el semiplano superior (donde f es positiva) menos el área de la parte de $G(f, a, b)$ que está en el semiplano inferior (donde f es negativa), y el número $I(f, P)$ es un *valor aproximado por defecto*.

Interpretación de las sumas superior e inferior




$y = f(x)$
a
b


$y = f(x)$
a
b

Partes positiva y negativa de una función

Cualquier función f puede escribirse como diferencia de dos funciones positivas:

$$f^{+}(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^{-}(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = \max\{-f(x), 0\}$$

Partes positiva y negativa de una función

Cualquier función f puede escribirse como diferencia de dos funciones positivas:

$$f^{+}(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^{-}(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = \max\{-f(x), 0\}$$

Es claro que $f(x) = f^{+}(x) - f^{-}(x)$ y que $f^{+}(x) \geqslant 0$, $f^{-}(x) \geqslant 0$. La función f^{+} se llama **parte positiva** de f, y la función f^{-} se llama **parte negativa** de f.

Partes positiva y negativa de una función

Cualquier función f puede escribirse como diferencia de dos funciones positivas:

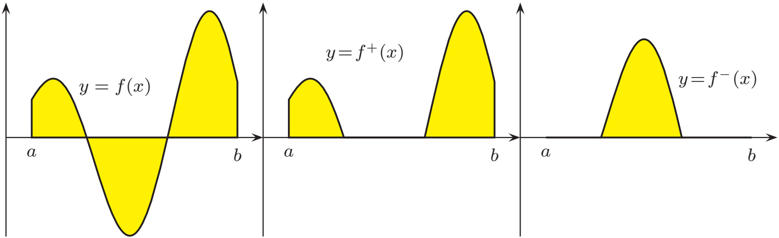
$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} = \max\{-f(x), 0\}$$

Es claro que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ y que $f^+(x) \geqslant 0$, $f^-(x) \geqslant 0$. La función f^+ se llama **parte positiva** de f, y la función f^- se llama **parte negativa** de f.

Como consecuencia de las definiciones dadas $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

Partes positiva y negativa de una función



Sea f una función acotada y positiva en $[a,b]$. Se dice que el conjunto $G(f,a,b)$ **tiene área** cuando

$$\boxed{\inf\{S(f,P) : P \in \mathscr{P}[a,b]\} = \sup\{I(f,P) : P \in \mathscr{P}[a,b]\}}$$

La integral como área

Sea f una función acotada y positiva en $[a,b]$. Se dice que el conjunto $G(f,a,b)$ **tiene área** cuando

$$\boxed{\inf\{S(f,P) : P \in \mathscr{P}[a,b]\} = \sup\{I(f,P) : P \in \mathscr{P}[a,b]\}}$$

Dicho valor común es, por definición, el valor del área y lo representaremos por $\lambda(G(f,a,b))$.

La integral como área

Sea f una función acotada y positiva en $[a, b]$. Se dice que el conjunto $G(f, a, b)$ **tiene área** cuando

$$\boxed{\inf\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} = \sup\{I(f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}}$$

Dicho valor común es, por definición, el valor del área y lo representaremos por $\lambda(G(f, a, b))$.

Cuando esto ocurre, se dice también que la función f **es integrable Riemann** en $[a, b]$ y, por definición, la integral de f en $[a, b]$ es igual a $\lambda(G(f, a, b))$.

La integral como área

Sea f una función acotada y positiva en $[a,b]$. Se dice que el conjunto $G(f,a,b)$ **tiene área** cuando

$$\boxed{\inf\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} = \sup\{I(f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}}$$

Dicho valor común es, por definición, el valor del área y lo representaremos por $\lambda(G(f,a,b))$.

Cuando esto ocurre, se dice también que la función f **es integrable Riemann** en $[a,b]$ y, por definición, la integral de f en $[a,b]$ es igual a $\lambda(G(f,a,b))$.Simbólicamente escribimos:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda(G(f,a,b))}$$

La integral como área con signo

En el caso general en que la función f toma valores positivos y negativos, se dice que f es integrable Riemann en $[a, b]$ cuando lo son las funciones f^+ y f^-, en cuyo caso se define la integral de f en $[a, b]$ como el número:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f^+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f^-(x)\,\mathrm{d}x = \lambda(G(f^+, a, b)) - \lambda(G(f^-, a, b))}$$

Propiedades básicas de la integral

Linealidad. Si f, g son integrables en $[a, b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable en $[a, b]$ y

Propiedades básicas de la integral

Linealidad. Si f, g son integrables en $[a, b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Propiedades básicas de la integral

Linealidad. Si f, g son integrables en $[a, b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Conservación del orden. Si f, g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in [a, b]$, entonces:

Propiedades básicas de la integral

Linealidad. Si f, g son integrables en $[a, b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Conservación del orden. Si f, g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Propiedades básicas de la integral

Linealidad. Si f, g son integrables en $[a, b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Conservación del orden. Si f, g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

En particular, si f es integrable en $[a, b]$ y $m \leqslant f(x) \leqslant M\ \forall x \in [a, b]$, entonces:

Linealidad. Si f, g son integrables en $[a, b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Conservación del orden. Si f, g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

En particular, si f es integrable en $[a, b]$ y $m \leqslant f(x) \leqslant M\ \forall x \in [a, b]$, entonces:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

Propiedades básicas de la integral

Linealidad. Si f, g son integrables en $[a, b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Conservación del orden. Si f, g son integrables en $[a, b]$ y $f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

En particular, si f es integrable en $[a, b]$ y $m \leqslant f(x) \leqslant M\ \forall x \in [a, b]$, entonces:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

Propiedades básicas de la integral

Si f es integrable en $[a, b]$ también $|f|$ es integrable en $[a, b]$ y:

Propiedades básicas de la integral

Si f es integrable en $[a, b]$ también $|f|$ es integrable en $[a, b]$ y:

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Propiedades básicas de la integral

Si f es integrable en $[a,b]$ también $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Aditividad respecto del intervalo. Sea $a < c < b$. Una función f es integrable en $[a,b]$ si, y sólo si, es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$, en cuyo caso se verifica la igualdad:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Propiedades básicas de la integral

Si f es integrable en $[a, b]$ también $|f|$ es integrable en $[a, b]$ y:

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Aditividad respecto del intervalo. Sea $a < c < b$. Una función f es integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$, en cuyo caso se verifica la igualdad:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

El producto de funciones integrables Riemann también es una función integrable Riemann.

Condiciones suficientes de integrabilidad Riemann

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Cada una de las siguientes condiciones garantizan que f es integrable Riemann en $[a, b]$.

Condiciones suficientes de integrabilidad Riemann

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Cada una de las siguientes condiciones garantizan que f es integrable Riemann en $[a, b]$.

a) f está acotada en $[a, b]$ y tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$. En particular, toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es integrable en dicho intervalo.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Cada una de las siguientes condiciones garantizan que f es integrable Riemann en $[a, b]$.

a) f está acotada en $[a, b]$ y tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$. En particular, toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es integrable en dicho intervalo.

b) f es monótona en $[a, b]$.

La pregunta que os estáis haciendo

¿Cómo podemos, a partir de la definición dada, calcular $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$?

Aproximando por sumas de Riemann

Si f es integrable en $[a, b]$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Aproximando por sumas de Riemann

Si f es integrable en $[a,b]$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

En particular, si f es integrable en $[0,1]$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Aproximando por sumas de Riemann

Si f es integrable en $[a, b]$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

En particular, si f es integrable en $[0, 1]$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Estos resultados no se usan para calcular integrales sino para calcular límites de sucesiones que son sumas de Riemann.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y definamos $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

para todo $x \in [a, b]$. Entonces:

Teorema Fundamental del Cálculo

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y definamos $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

para todo $x \in [a, b]$. Entonces:

i) F es continua en $[a, b]$.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y definamos $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

para todo $x \in [a, b]$. Entonces:

i) F es continua en $[a, b]$.

ii) En todo punto c de $[a, b]$ en el que f sea continua se verifica que F es derivable en dicho punto siendo $F'(c) = f(c)$.

Teorema Fundamental del Cálculo

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y definamos $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

para todo $x \in [a, b]$. Entonces:

i) F es continua en $[a, b]$.

ii) En todo punto c de $[a, b]$ en el que f sea continua se verifica que F es derivable en dicho punto siendo $F'(c) = f(c)$.

En particular, si f es continua en $[a, b]$, entonces F es derivable en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Convenio

A veces hay que considerar funciones de la forma

$$H(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

en donde $a < c < b$ y $x \in [a, b]$; por lo que es necesario precisar lo que se entiende por $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ cuando $x < c$. El convenio que se hace es que:

$$\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_v^u f(t)\,\mathrm{d}t$$

cualesquiera sean los números u y v.

Primitivas

Dada un función $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, cualquier función $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ que sea continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$ y verifique que $H'(x) = h(x)$ para todo $x \in]a, b[$, se llama una **primitiva** de f en el intervalo $[a, b]$.

Dada un función $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, cualquier función $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ que sea continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$ y verifique que $H'(x) = h(x)$ para todo $x \in]a, b[$, se llama una **primitiva** de f en el intervalo $[a, b]$.

Toda función continua en un intervalo tiene primitivas en dicho intervalo.

Dada un función $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, cualquier función $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ que sea continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$ y verifique que $H'(x) = h(x)$ para todo $x \in]a, b[$, se llama una **primitiva** de f en el intervalo $[a, b]$.

Toda función continua en un intervalo tiene primitivas en dicho intervalo.

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua en intervalo I. Sea $a \in I$. La función $F : I \to \mathbb{R}$ dada por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

es una primitiva de f en I.

Derivación de funciones definidas por integrales

Para derivar funciones de la forma

$$H(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

donde f es una función continua y g es una función derivable, se aplica el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena para derivar la función compuesta $H(x) = F(g(x))$, donde

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Derivación de funciones definidas por integrales

Para derivar funciones de la forma

$$H(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

donde f es una función continua y g es una función derivable, se aplica el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena para derivar la función compuesta $H(x) = F(g(x))$, donde

$$F(x) = \int_a^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Tenemos que:

$$H'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Para derivar funciones de la forma

$$H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

donde f es una función continua y u, v son funciones derivables, se escribe

$$H(x) = \int_{a}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{a}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

y se aplica lo dicho anteriormente.

Regla de Barrow

La regla de Barrow es la herramienta principal para calcular integrales. Dice así:

Regla de Barrow

La regla de Barrow es la herramienta principal para calcular integrales. Dice así:

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y supongamos que h es una primitiva de f en $[a, b]$. Entonces:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = h(b) - h(a)$$

Integrales impropias de Riemann

Sea $f : [c,b[\to \mathbb{R}$ continua en el intervalo $[c,b[$, donde $c \in \mathbb{R}$ y $c < b \leqslant +\infty$. Se define la integral impropia de Riemann de f en $[c,b[$ como el límite:

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b} \int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Integrales impropias de Riemann

Sea $f : [c, b[\to \mathbb{R}$ continua en el intervalo $[c, b[$, donde $c \in \mathbb{R}$ y $c < b \leqslant +\infty$. Se define la integral impropia de Riemann de f en $[c, b[$ como el límite:

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to b} \int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Supuesto que dicho límite exista y sea un número real, en cuyo caso se dice también que la integral de f es convergente en $[c, b[$.

Integrales impropias de Riemann

Sea $f:[c,b[\to\mathbb{R}$ continua en el intervalo $[c,b[$, donde $c\in\mathbb{R}$ y $c<b\leqslant+\infty$. Se define la integral impropia de Riemann de f en $[c,b[$ como el límite:

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to b}\int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Supuesto que dicho límite exista y sea un número real, en cuyo caso se dice también que la integral de f es convergente en $[c,b[$.

Sea $f:]a,c]\to\mathbb{R}$ continua en el intervalo $]a,c]$, donde $c\in\mathbb{R}$ y $-\infty\leqslant a<c$. Se define la integral impropia de Riemann de f en $]a,c]$ como el límite:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{t\to a}\int_t^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Sea $f : [c,b[\to \mathbb{R}$ continua en el intervalo $[c,b[$, donde $c \in \mathbb{R}$ y $c < b \leqslant +\infty$. Se define la integral impropia de Riemann de f en $[c,b[$ como el límite:

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to b} \int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Supuesto que dicho límite exista y sea un número real, en cuyo caso se dice también que la integral de f es convergente en $[c,b[$.

Sea $f :]a,c] \to \mathbb{R}$ continua en el intervalo $]a,c]$, donde $c \in \mathbb{R}$ y $-\infty \leqslant a < c$. Se define la integral impropia de Riemann de f en $]a,c]$ como el límite:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to a} \int_t^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Supuesto que dicho límite exista y sea un número real, en cuyo caso se dice también que la integral de f es convergente en $]a,c]$.

Integrales impropias de Riemann

Sea $f : [c, b[\to \mathbb{R}$ continua en el intervalo $[c, b[$, donde $c \in \mathbb{R}$ y $c < b \leqslant +\infty$. Se define la integral impropia de Riemann de f en $[c, b[$ como el límite:

$$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to b} \int_c^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

Supuesto que dicho límite exista y sea un número real, en cuyo caso se dice también que la integral de f es convergente en $[c, b[$.

Sea $f :]a, c] \to \mathbb{R}$ continua en el intervalo $]a, c]$, donde $c \in \mathbb{R}$ y $-\infty \leqslant a < c$. Se define la integral impropia de Riemann de f en $]a, c]$ como el límite:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to a} \int_t^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

Supuesto que dicho límite exista y sea un número real, en cuyo caso se dice también que la integral de f es convergente en $]a, c]$.

Cuando los límites anteriores existen y son igual a $+\infty$ (resp. $-\infty$) se dice que la respectiva integral es positivamente o negativamente divergente.

Sea $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continua en el intervalo $]a,b[$, donde $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Sea $c \in \mathbb{R}$ con $a < c < b$. Se dice que la integral de f es convergente en $]a,b[$ cuando las integrales de f en $]a,c]$ y en $[c,b[$ son convergentes, en cuyo caso se define:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Criterio básico de convergencia.

Sea f continua y *positiva* en $[c, b[$. Entonces, la integral de f en $[c, b[$ es convergente si, y sólo si, la función

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

está mayorada en $[c, b[$, en cuyo caso:

$$\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sup\left\{\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \, : x \in [c, b[\right\}$$

En otro caso la integral de f en $[c, b[$ es positivamente divergente.

Criterio básico de convergencia.

Sea f continua y *positiva* en $[c,b[$. Entonces, la integral de f en $[c,b[$ es convergente si, y sólo si, la función

$$F(x)=\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

está mayorada en $[c,b[$, en cuyo caso:

$$\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t=\sup\left\{\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t\ : x\in[c,b[\right\}$$

En otro caso la integral de f en $[c,b[$ es positivamente divergente.

Criterio de comparación.

Sean f y g continuas y *positivas* en $[c,b[$. Supongamos que la integral de g en $[c,b[$ es convergente y que $f(x)\leqslant g(x)$ para todo $x\in[c,b[$. Entonces la integral de f en $[c,b[$ también es convergente.

Criterio límite de comparación.

Sean f y g continuas y *positivas* en $[c, b[$. Supongamos que:

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \rho$$

Se verifica que:

Criterio límite de comparación.

Sean f y g continuas y *positivas* en $[c, b[$. Supongamos que:

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \rho$$

Se verifica que:

- Si $\rho > o$ las integrales de f y g en $[c, b[$ ambas convergen o ambas divergen positivamente.

Criterio límite de comparación.

Sean f y g continuas y *positivas* en $[c, b[$. Supongamos que:

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \rho$$

Se verifica que:

- Si $\rho > o$ las integrales de f y g en $[c, b[$ ambas convergen o ambas divergen positivamente.
- Si $\rho = 0$ y la integral de g en $[c, b[$ es convergente entonces también converge la integral de f en $[c, b[$.

Criterio límite de comparación.

Sean f y g continuas y *positivas* en $[c,b[$. Supongamos que:

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=\rho$$

Se verifica que:

- Si $\rho > o$ las integrales de f y g en $[c,b[$ ambas convergen o ambas divergen positivamente.
- Si $\rho = 0$ y la integral de g en $[c,b[$ es convergente entonces también converge la integral de f en $[c,b[$.
- Si $\rho = +\infty$ y la integral de g en $[c,b[$ es divergente entonces también diverge la integral de f en $[c,b[$

Integrales impropias absolutamente convergentes

Se dice que la integral de f es **absolutamente convergente** en un cierto intervalo cuando la integral de la función $|f|$ es convergente en dicho intervalo.

Integrales impropias absolutamente convergentes

Se dice que la integral de f es **absolutamente convergente** en un cierto intervalo cuando la integral de la función $|f|$ es convergente en dicho intervalo.

Si la integral de f ***es absolutamente convergente, entonces la integral de*** f ***también es convergente.***

Ejemplos importantes

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_a^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$$

Donde $R(x)$ es una función racional cuyo denominador no se anula en $[a,+\infty[$.

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

Calcula los límites de las siguientes sucesiones expresándolas como sumas de Riemann.

$$a)\ x_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \quad (\alpha > 0)$$

$$e)\ x_n = \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+4} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n^2}$$

$$i)\ x_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$$

Ejemplos

Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} \cos(t^2)\,dt$

b) $G(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{1} e^{\operatorname{sen} t}\,dt$

c) $G(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2+x} \frac{1}{2+\sqrt[3]{t^2}}\,dt$

d) $G(x) = \displaystyle\int_1^{e^x} \operatorname{sen}(\ln t)\,dt$

e) $G(x) = \displaystyle\int_0^{x} \left(\int_1^{y^2} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,dt \right) dy$

f) $G(x) = \displaystyle\int_0^{\int_1^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du} \frac{1}{t^2+\operatorname{sen}^4 t}\,dt$

Prueba que para todo $x \in [0, \pi/2]$ se verifica la igualdad:

$$\int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t}\, \mathrm{d}t + \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arcsen} \sqrt{t} = \frac{\pi}{4}$$

Ejemplos

Sea $F:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ definida por $F(x)=\int_x^{2x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Estudia los extremos relativos y absolutos de F, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión y calcula el límite de F en $+\infty$.

Ejemplos

Calcula los siguientes límites.

$$a)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t}{x^3} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^{x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{x} e^{t^2}\operatorname{sen} t\,\mathrm{d}t} \qquad c)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\int_0^{x^2} \left(e^{-t^2}-e^{-1}\right)\mathrm{d}t}{x\sqrt{x}}$$

Ejemplos

Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias.

$$a) \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,, \quad b) \int_0^1 \frac{x}{x-\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x \quad c) \int_0^{+\infty} \frac{x+5}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencia. Usa los criterios de comparación.

Ejemplo

Estudia la convergencia de la integral

$$I = \int_0^{+\infty} x^\alpha \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}\, \mathrm{d}x$$

Según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cálculo de primitivas

El problema del cálculo de primitivas consiste en tratar de expresar la ***“primitiva trivial”***

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

por medio de funciones elementales que permitan una evaluación efectiva de la integral.

Cálculo de primitivas

El problema del cálculo de primitivas consiste en tratar de expresar la ***"primitiva trivial"***

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

por medio de funciones elementales que permitan una evaluación efectiva de la integral.

Eso no siempre puede hacerse.

El problema del cálculo de primitivas consiste en tratar de expresar la ***"primitiva trivial"***

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

por medio de funciones elementales que permitan una evaluación efectiva de la integral.

Eso no siempre puede hacerse.

Es frecuente que una función elemental no tenga primitivas que puedan expresarse por medio de funciones elementales.

Cálculo de primitivas

El problema del cálculo de primitivas consiste en tratar de expresar la ***"primitiva trivial"***

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

por medio de funciones elementales que permitan una evaluación efectiva de la integral.

Eso no siempre puede hacerse.

Es frecuente que una función elemental no tenga primitivas que puedan expresarse por medio de funciones elementales.

Esto ocurre, por ejemplo, con las funciones e^{-x^2}, $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\operatorname{sen}(x^2)$, $\sqrt{x^3+1}$, y muchas más.

Cálculo de primitivas

El problema del cálculo de primitivas consiste en tratar de expresar la ***"primitiva trivial"***

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

por medio de funciones elementales que permitan una evaluación efectiva de la integral.

Eso no siempre puede hacerse.

Es frecuente que una función elemental no tenga primitivas que puedan expresarse por medio de funciones elementales.

Esto ocurre, por ejemplo, con las funciones e^{-x^2}, $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\operatorname{sen}(x^2)$, $\sqrt{x^3+1}$, y muchas más.

Vamos a ver algunos tipos de funciones elementales cuyas primitivas también pueden expresarse por medio de funciones elementales y pueden calcularse con procedimientos más o menos sistemáticos.

Notación y terminología usuales

Para representar una primitiva de una función f, se usa la notación

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Notación y terminología usuales

Para representar una primitiva de una función f, se usa la notación

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

La integral de una función en un intervalo, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, se llama a veces ***"integral definida"*** de f (**y es un número**).

Notación y terminología usuales

Para representar una primitiva de una función f, se usa la notación

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

La integral de una función en un intervalo, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, se llama a veces ***"integral definida"*** de f (**y es un número**).

El símbolo $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ se llama ***"integral indefinida"*** o, simplemente, *"integral"* de f (y ***representa una primitiva cualquiera*** de f).

Notación y terminología usuales

Para representar una primitiva de una función f, se usa la notación

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

La integral de una función en un intervalo, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, se llama a veces ***"integral definida"*** de f (**y es un número**).

El símbolo $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ se llama ***"integral indefinida"*** o, simplemente, *"integral"* de f (y ***representa una primitiva cualquiera*** de f).

Aunque esto puede ser confuso, no olvides que, *cuando hablamos de calcular la integral* $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ *lo que realmente queremos decir es que queremos calcular una primitiva de* f.

Variable de integración

Como ya sabes, en los símbolos $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ o $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la letra "*x*" puede sustituirse por cualquier otra y el símbolo "$\mathrm{d}x$" (que se lee *"diferencial x"*) sirve para indicar la variable de integración.

Variable de integración

Como ya sabes, en los símbolos $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ o $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la letra "x" puede sustituirse por cualquier otra y el símbolo "$\mathrm{d}x$" (que se lee *"diferencial x"*) sirve para indicar la variable de integración.

Esto es muy útil si la función f contiene parámetros. Por ejemplo, son muy diferentes las integrales $\int x^y dx$ y $\int x^y dy$.

Variable de integración

Como ya sabes, en los símbolos $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ o $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ la letra "x" puede sustituirse por cualquier otra y el símbolo "$\mathrm{d}x$" (que se lee *"diferencial x"*) sirve para indicar la variable de integración.

Esto es muy útil si la función f contiene parámetros. Por ejemplo, son muy diferentes las integrales $\int x^y dx$ y $\int x^y dy$.

Te recuerdo también que, si $y = y(x)$ es una función de x, suele usarse la notación $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x$ que es útil para mecanizar algunos cálculos pero que no tiene ningún significado especial: es una forma de indicar que y' es la derivada de y respecto a x.

Notación

Si φ es una función, se usa la notación $\varphi(x)\Big|_{x=c}^{x=d}$ o sencillamente, $\varphi(x)\big|_c^d$ para indicar el número $\varphi(d) - \varphi(c)$.

$$\varphi(x)\Big|_{x=c}^{x=d} = \varphi(x)\big|_c^d = \varphi(d) - \varphi(c)$$

Notación

Si φ es una función, se usa la notación $\varphi(x)\Big|_{x=c}^{x=d}$ o sencillamente, $\varphi(x)\Big|_c^d$ para indicar el número $\varphi(d)-\varphi(c)$.

$$\varphi(x)\Big|_{x=c}^{x=d} = \varphi(x)\Big|_c^d = \varphi(d)-\varphi(c)$$

Usaremos la notación $\varphi(x)\Big|_{x\to a}^{x\to b}$ para indicar $\lim\limits_{x\to b}\varphi(x)-\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$. Esta notación es cómoda cuando estudiamos convergencia de integrales.

$$\varphi(x)\Big|_{x\to a}^{x\to b} = \lim_{x\to b}\varphi(x)-\lim_{x\to a}\varphi(x)$$

Integración por partes

La igualdad:

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Integración por partes

La igualdad:

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Que suele escribirse en la forma:

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

Integración por partes

La igualdad:

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Que suele escribirse en la forma:

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

Se llama *fórmula de integración por partes*.

Integración por partes

La igualdad:

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Que suele escribirse en la forma:

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

Se llama *fórmula de integración por partes*.Naturalmente:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Integración por partes

La igualdad:

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Que suele escribirse en la forma:

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

Se llama *fórmula de integración por partes*.Naturalmente:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Para el caso de integrales impropias:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_{x\to a}^{x\to b} - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

Casos en que se usa la integración por partes

Para calcular una integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ en la que la derivada de $f(x)$ es más sencilla que la propia función, como es el caso de $\ln x$, $\operatorname{arcsen} x$, $\operatorname{arctg} x$. Se elige $u(x) = f(x)$.

Para calcular una integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ en la que la derivada de $f(x)$ es más sencilla que la propia función, como es el caso de $\ln x$, $\operatorname{arcsen} x$, $\operatorname{arctg} x$. Se elige $u(x) = f(x)$.

Cuando $f(x)$ es de la forma $P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$, $P(x)\,\operatorname{sen}(ax)$, $P(x)\cos(ax)$, donde $P(x)$ es una función polinómica.

Para calcular una integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ en la que la derivada de $f(x)$ es más sencilla que la propia función, como es el caso de $\ln x$, $\arcsen x$, $\operatorname{arctg} x$. Se elige $u(x) = f(x)$.

Cuando $f(x)$ es de la forma $P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$, $P(x)\operatorname{sen}(ax)$, $P(x)\cos(ax)$, donde $P(x)$ es una función polinómica.En todos los casos se elige $u(x) = P(x)$ y se obtiene una integral *del mismo tipo que la primera pero con el grado del polinomio rebajado en una unidad*. El proceso se repite tantas veces como sea necesario.

Para calcular una integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ en la que la derivada de $f(x)$ es más sencilla que la propia función, como es el caso de $\ln x$, $\operatorname{arcsen} x$, $\operatorname{arctg} x$. Se elige $u(x) = f(x)$.

Cuando $f(x)$ es de la forma $P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$, $P(x)\operatorname{sen}(ax)$, $P(x)\cos(ax)$, donde $P(x)$ es una función polinómica.En todos los casos se elige $u(x) = P(x)$ y se obtiene una integral *del mismo tipo que la primera pero con el grado del polinomio rebajado en una unidad*. El proceso se repite tantas veces como sea necesario.

Cuando la integral $\int v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ es parecida a la de partida, de forma que al volver a aplicar el proceso la integral de partida se repite y es posible despejarla de la igualdad obtenida.

Ejemplos de integración por partes

$$\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x \,, \quad \int x^2 \, \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x \,, \quad \int \cos(\ln x) \, \mathrm{d}x$$

Integración por recurrencia

La técnica de integración por partes permite en algunas ocasiones relacionar una integral de la forma $I_n = \int f(x,n)\,\mathrm{d}x$ en la que interviene un **parámetro** n (con frecuencia un número natural) con otra del mismo tipo en la que el parámetro ha disminuido en una o en dos unidades.

Integración por recurrencia

La técnica de integración por partes permite en algunas ocasiones relacionar una integral de la forma $I_n = \int f(x,n)\,\mathrm{d}x$ en la que interviene un **parámetro** n (con frecuencia un número natural) con otra del mismo tipo en la que el parámetro ha disminuido en una o en dos unidades.

Las expresiones así obtenidas se llaman **fórmulas de reducción o de recurrencia** y permiten el cálculo efectivo de la integral cuando se particularizan valores del parámetro.

$$I_n = \int (\ln x)^n \, dx \,, \quad J_n = \int x^n \, e^{a\,x} \, dx \,, \quad H_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} x = g(t),\ \ \mathrm{d}x = g'(t)dt \\ a = g(c),\ \ b = g(d) \end{array} \right] = \int_c^d f(g(t))g'(t)\, dt$$

Para el caso de integrales indefinidas este proceso de sustitución se representa de forma menos precisa y se escribe simplemente

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x = g(t) \\ \mathrm{d}x = g'(t)dt \end{array} \right] = \int f(g(t))g'(t)\, dt$$

Pueden hacerse cambios de variable en integrales impropias

Puede ocurrir que al hacer un cambio de variable en una *"integral corriente"* obtengamos una *"integral impropia"*. No hay que preocuparse porque **para estudiar la convergencia de una integral pueden hacerse cambios de variable *biyectivos*: ello no altera la eventual convergencia de la integral ni su valor**.

Ejemplos de cambio de variable

Con frecuencia se hacen cambios de variable para quitar radicales.

Con frecuencia se hacen cambios de variable para quitar radicales.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x$$

Con frecuencia se hacen cambios de variable para quitar radicales.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$$

Ejemplos de cambio de variable

Con frecuencia se hacen cambios de variable para quitar radicales.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \sqrt{x^2 - a^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{a}^{b} \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x \qquad (a < b)$$

Ejemplos

Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias y cuando sean convergentes calcula su valor.

$$a)\ \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2+x+1}} \qquad b)\ \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad c)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x$$

$$d)\ \int_0^{+\infty} \frac{1+x^4}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x \qquad e)\ \int_0^{1} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad f)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Sugerencias. En *a)* hacer $x = 1/t$ y en *d)* $x = \operatorname{tg} t$.

Dadas dos funciones polinómicas $P(x)$ y $Q(x)$, queremos calcular $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$.

Integración de funciones racionales

Dadas dos funciones polinómicas $P(x)$ y $Q(x)$, queremos calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$.

Si el grado de P es mayor o igual que el de Q, podemos dividir los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)}$$

Integración de funciones racionales

Dadas dos funciones polinómicas $P(x)$ y $Q(x)$, queremos calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$.

Si el grado de P es mayor o igual que el de Q, podemos dividir los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)}$$

donde $H(x)$ y $G(x)$ son polinomios y el grado de G es menor que el grado de Q. Por tanto, *supondremos que el grado de P es menor que el grado de Q. Supondremos también que el coeficiente líder del polinomio Q es* 1.

Integración de funciones racionales

Dadas dos funciones polinómicas $P(x)$ y $Q(x)$, queremos calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$.

Si el grado de P es mayor o igual que el de Q, podemos dividir los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)}$$

donde $H(x)$ y $G(x)$ son polinomios y el grado de G es menor que el grado de Q. Por tanto, *supondremos que el grado de P es menor que el grado de Q. Supondremos también que el coeficiente líder del polinomio Q es* 1.

La técnica para calcular la integral consiste en descomponer la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en otras más sencillas llamadas *"fracciones simples"*.

Método de los coeficientes indeterminados

Lo primero que hay que hacer es descomponer el denominador $Q(x)$ en producto de factores irreducibles.

Método de los coeficientes indeterminados

Lo primero que hay que hacer es descomponer el denominador $Q(x)$ en producto de factores irreducibles.

Cada raíz real α de orden o multiplicidad k da lugar a un factor del tipo $(x-\alpha)^k$.

Método de los coeficientes indeterminados

Lo primero que hay que hacer es descomponer el denominador $Q(x)$ en producto de factores irreducibles.

Cada raíz real α de orden o multiplicidad k da lugar a un factor del tipo $(x-\alpha)^k$.

Cada raíz compleja junto con su conjugada de multiplicidad p dan lugar a un factor del tipo $(x^2+bx+c)^p$ con $(b^2-4c<0)$.

Método de los coeficientes indeterminados

Lo primero que hay que hacer es descomponer el denominador $Q(x)$ en producto de factores irreducibles.

Cada raíz real α de orden o multiplicidad k da lugar a un factor del tipo $(x-\alpha)^k$.

Cada raíz compleja junto con su conjugada de multiplicidad p dan lugar a un factor del tipo $(x^2+bx+c)^p$ con $(b^2-4c<0)$.

Se iguala $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ a una suma de fracciones simples.

Método de los coeficientes indeterminados

Lo primero que hay que hacer es descomponer el denominador $Q(x)$ en producto de factores irreducibles.

Cada raíz real α de orden o multiplicidad k da lugar a un factor del tipo $(x-\alpha)^k$.

Cada raíz compleja junto con su conjugada de multiplicidad p dan lugar a un factor del tipo $(x^2+bx+c)^p$ con $(b^2-4c<0)$.

Se iguala $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ a una suma de fracciones simples.

Por cada factor $(x-\alpha)^k$ debemos poner una suma de k fracciones de la forma:

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{A_j}{(x-\alpha)^j}$$

Método de los coeficientes indeterminados

Lo primero que hay que hacer es descomponer el denominador $Q(x)$ en producto de factores irreducibles.

Cada raíz real α de orden o multiplicidad k da lugar a un factor del tipo $(x-\alpha)^k$.

Cada raíz compleja junto con su conjugada de multiplicidad p dan lugar a un factor del tipo $(x^2+bx+c)^p$ con $(b^2-4c<0)$.

Se iguala $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ a una suma de fracciones simples.

Por cada factor $(x-\alpha)^k$ debemos poner una suma de k fracciones de la forma:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{(x-\alpha)^j}$$

Por cada factor $(x^2+bx+c)^p$ con $(b^2-4c<0)$ debemos poner una suma de p fracciones del tipo:

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{B_j x + C_j}{(x^2+bx+c)^j}$$

Método de los coeficientes indeterminados

Lo primero que hay que hacer es descomponer el denominador $Q(x)$ en producto de factores irreducibles.

Cada raíz real α de orden o multiplicidad k da lugar a un factor del tipo $(x-\alpha)^k$.

Cada raíz compleja junto con su conjugada de multiplicidad p dan lugar a un factor del tipo $(x^2+bx+c)^p$ con $(b^2-4c<0)$.

Se iguala $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ a una suma de fracciones simples.

Por cada factor $(x-\alpha)^k$ debemos poner una suma de k fracciones de la forma:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{A_j}{(x-\alpha)^j}$$

Por cada factor $(x^2+bx+c)^p$ con $(b^2-4c<0)$ debemos poner una suma de p fracciones del tipo:

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{B_j x + C_j}{(x^2+bx+c)^j}$$

Los coeficientes A_j, B_j, C_j se calculan reduciendo a común denominador e identificando numeradores.

Ejemplos

Descomponer en fracciones simples las siguientes fracciones:

$$\frac{2-x^2}{x^3-3x^2}, \quad \frac{x^4+6x^3-7x^2-4x-3}{x^3-2x^2+x-2}, \quad \frac{1}{1-x^4}$$

$$\frac{1}{1+x^4}, \quad \frac{3x^2+30}{x^4+2x^2-8}$$

Integración de las fracciones simples

- $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a|.$

Integración de las fracciones simples

- $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a|.$
- $\displaystyle\int \frac{B\,x+C}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$, $b^2-4c<0$. Se pone $x^2+bx+c=(x-d)^2+k^2$ con $d=-b/2$ y $k=\sqrt{4c-b^2}/2$ (observa que $d\pm ik$ son las raíces imaginarias de $x^2+bx+c=0$).

Integración de las fracciones simples

- $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a|.$
- $\displaystyle\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x$, $b^2-4c<0$. Se pone $x^2+bx+c=(x-d)^2+k^2$ con $d=-b/2$ y $k=\sqrt{4c-b^2}/2$ (observa que $d\pm ik$ son las raíces imaginarias de $x^2+bx+c=0$).

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{Bx+C}{(x-d)^2+k^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{B(x-d)+C+Bd}{(x-d)^2+k^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{B(x-d)}{(x-d)^2+k^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{C+Bd}{(x-d)^2+k^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{B}{2}\ln\left((x-d)^2+k^2\right) + (C+Bd)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-d)^2+k^2} = \\ &= \frac{B}{2}\ln\left((x-d)^2+k^2\right) + \frac{C+Bd}{k}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-d}{k}\right).\end{aligned}$$

Cuando hay raíces reales múltiples aparecen fracciones del tipo $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ con $k \geqslant 2$.

Cuando hay raíces reales múltiples aparecen fracciones del tipo $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ con $k \geqslant 2$.Su integración es inmediata pues:

Cuando hay raíces reales múltiples aparecen fracciones del tipo $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ con $k \geqslant 2$.Su integración es inmediata pues:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$$

Cuando hay raíces reales múltiples aparecen fracciones del tipo $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ con $k \geqslant 2$.Su integración es inmediata pues:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$$

Cuando hay raíces imaginarias múltiples aparecen fracciones del tipo $\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k}$ con $k \geqslant 2$.

Cuando hay raíces reales múltiples aparecen fracciones del tipo $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ con $k \geqslant 2$.Su integración es inmediata pues:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$$

Cuando hay raíces imaginarias múltiples aparecen fracciones del tipo $\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^k}$ con $k \geqslant 2$.Su integración puede hacerse reduciéndolas por cambio de variable a una integral del tipo

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$$

para la que se conoce una fórmula de reducción.

Ejemplo

Calcula la primitiva:

$$\int \frac{x+1}{x(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

Y usa el resultado obtenido para calcular la integral:

$$\int_2^{+\infty} \frac{x+1}{x(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$$

Ejemplo

Calcula la primitiva:

$$\int \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x$$

Y usa el resultado obtenido para calcular la integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,\mathrm{d}x$$

Integración por racionalización

Nos vamos a ocupar ahora de algunos tipos de funciones no racionales cuyas integrales se pueden transformar, por medio de un cambio de variable, en integrales de funciones racionales.

Nos vamos a ocupar ahora de algunos tipos de funciones no racionales cuyas integrales se pueden transformar, por medio de un cambio de variable, en integrales de funciones racionales.

En lo que sigue, representaremos por $R = R(x, y)$ una función racional de dos variables, es decir, un cociente de funciones polinómicas de dos variables.

Las integrales del tipo $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ donde $R = R(x, y)$ una función racional de dos variables, se racionalizan con el cambio de variable $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Con lo que

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

Con ello resulta:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \Big[t = \operatorname{tg}(x/2)\Big] = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

que es una integral de una función racional que ya sabemos resolver.

Ejemplos

Calcula las integrales

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x}, \qquad \int_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \cos x}$$

Casos particulares

• Cuando $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se dice que *“R es par en seno y coseno”*. En este caso es preferible el cambio $\operatorname{tg} x = t$. Con lo que

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{dt}{1+t^2}$$

Casos particulares

• Cuando $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se dice que *“R es par en seno y coseno”*. En este caso es preferible el cambio $\operatorname{tg} x = t$. Con lo que

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{dt}{1+t^2}$$

En el caso particular de tratarse de una integral del tipo

$$\int \operatorname{sen}^n x \, \cos^m x \, \mathrm{d}x$$

con n y m números enteros *pares*, es preferible simplificar la integral usando las identidades

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Casos particulares

• Cuando $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se dice que *"R es par en seno y coseno"*. En este caso es preferible el cambio $\operatorname{tg} x = t$. Con lo que

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{dt}{1+t^2}$$

En el caso particular de tratarse de una integral del tipo

$$\int \operatorname{sen}^n x \, \cos^m x \, \mathrm{d}x$$

con n y m números enteros *pares*, es preferible simplificar la integral usando las identidades

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

• Cuando $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se dice que *"R es impar en seno"* y el cambio $\cos x = t$ suele ser eficaz.

Casos particulares

• Cuando $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se dice que *"R es par en seno y coseno"*. En este caso es preferible el cambio $\operatorname{tg} x = t$. Con lo que

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{dt}{1+t^2}$$

En el caso particular de tratarse de una integral del tipo

$$\int \operatorname{sen}^n x \, \cos^m x \, \mathrm{d}x$$

con n y m números enteros *pares*, es preferible simplificar la integral usando las identidades

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

• Cuando $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se dice que *"R es impar en seno"* y el cambio $\cos x = t$ suele ser eficaz.

• Cuando $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ se dice que *"R es impar en coseno"* y el cambio $\operatorname{sen} x = t$ suele ser eficaz.

Calcula las primitivas

$$\int \operatorname{sen}^2 x \ \cos^2 x \ \mathrm{d}x \,, \qquad \int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} \ \mathrm{d}x \,, \qquad \int \frac{\operatorname{sen}^2 x \ \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} \ \mathrm{d}x$$

Las integrales de los tipos

$$\int \operatorname{sen}(ax+b)\operatorname{sen}(cx+d)\,\mathrm{d}x\,,\ \int \operatorname{sen}(ax+b)\cos(cx+d)\,\mathrm{d}x\,,\ \int \cos(ax+b)\cos(cx+d)\,\mathrm{d}x$$

se calculan usando las fórmulas:

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2},\ \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{2}$$

Integrales del tipo $\int R\big(x,\, [L(x)]^r, [L(x)]^s, \dots\big)\, \mathrm{d}x$ donde

$$L(x) = \frac{a\,x + b}{c\,x + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad ad - bc \neq 0 \quad r\,, s, \dots \in \mathbb{Q}$$

Integrales del tipo $\int R\big(x, [L(x)]^r, [L(x)]^s, \dots\big)\,\mathrm{d}x$ donde

$$L(x) = \frac{a\,x+b}{c\,x+d} \quad a,b,c,d \in \mathbb{R} \quad ad-bc \neq 0 \quad r\,,s,\dots \in \mathbb{Q}$$

Se racionalizan con el cambio $t^q = L(x)$ donde q es el mínimo común denominador de las fracciones $r, s, \dots$. Pues entonces tenemos que

$$x = \frac{d\,t^q - b}{a - c\,t^q} = r(t)$$

Integrales del tipo $\int R\big(x, [L(x)]^r, [L(x)]^s, \dots\big)\, \mathrm{d}x$ donde

$$L(x) = \frac{a\,x + b}{c\,x + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad ad - bc \neq 0 \quad r\,, s, \dots \in \mathbb{Q}$$

Se racionalizan con el cambio $t^q = L(x)$ donde q es el mínimo común denominador de las fracciones $r, s, \dots$. Pues entonces tenemos que

$$x = \frac{d\,t^q - b}{a - c\,t^q} = r(t)$$

y la integral se transforma en

$$\int R(r(t), t^{rq}, t^{sq}, \dots) r'(t)\, dt$$

en la que el integrando es una función racional de t.

Ejemplo

Calcula

$$\int \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/3} \frac{1}{1+x}\, \mathrm{d}x$$

- Si el trinomio ax^2+bx+c tiene dos raíces reales α y β, distintas entonces

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = [a(x-\alpha)(x-\beta)]^{1/2} = (x-\alpha)\left[\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}\right]^{1/2}$$

Donde, por comodidad, hemos supuesto que $x-\alpha>0$. Deducimos que la sustitución

$$\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha} = t^2 \quad (t>0), \qquad x = \frac{\alpha\, t^2 - \beta\,\alpha}{t^2-a} = r(t)$$

transforma la integral en $\int R\big(r(t),(r(t)-\alpha)t\big)r'(t)dt$ donde el integrando es una función racional de t.

- Si el trinomio $ax^2 + bx + c$ no tiene raíces reales, entonces debe ser $ax^2 + bx + c > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, en particular $c > 0$. La sustitución:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t\,x + \sqrt{c}\,, \quad x = \frac{b - 2t\sqrt{c}}{t^2 - a} = g(t)$$

transforma la integral en $\int R\big(g(t), t\,g(t) + \sqrt{c}\,\big)g'(t)dt$ donde el integrando es una función racional de t.

Las sustituciones anteriores se conocen como *sustituciones de Euler*.

Ejemplo

Calcula las integrales

$$\int \frac{x}{(7x-10-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x\,, \quad \int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Donde $P(x)$ es una función polinómica. Escribimos

Donde $P(x)$ es una función polinómica. Escribimos

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right) + \frac{C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Donde $P(x)$ es una función polinómica. Escribimos

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right) + \frac{C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

donde $Q(x)$ es un polinomio, cuyos coeficientes hay que calcular, de *grado una unidad menos que el del polinomio* $P(x)$ y C es una constante que también hay que calcular.

Donde $P(x)$ es una función polinómica. Escribimos

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right) + \frac{C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

donde $Q(x)$ es un polinomio, cuyos coeficientes hay que calcular, de *grado una unidad menos que el del polinomio* $P(x)$ y C es una constante que también hay que calcular.Observa que la igualdad anterior puede escribirse

$$P(x) = Q'(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q(x)(2ax+b) + C$$

Donde $P(x)$ es una función polinómica. Escribimos

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{d}{\mathrm{d}x}\left(Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right) + \frac{C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

donde $Q(x)$ es un polinomio, cuyos coeficientes hay que calcular, de *grado una unidad menos que el del polinomio* $P(x)$ y C es una constante que también hay que calcular.Observa que la igualdad anterior puede escribirse

$$P(x) = Q'(x)(ax^2+bx+c) + \frac{1}{2}Q(x)(2ax+b) + C$$

y a la derecha queda un polinomio de igual grado que $P(x)$ lo que permite identificar coeficientes.

Una vez calculados el polinomio Q y la constante C tenemos que

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + C\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$$

Una vez calculados el polinomio Q y la constante C tenemos que

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + C\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x$$

con lo que todo se reduce a calcular esta última integral. Mediante un cambio de variables sencillo, dicha integral, salvo constantes, puede escribirse de alguna de las formas:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \operatorname{arcsen}(t)\,,\ \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \operatorname{argsenh}(t)\,,\ \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \operatorname{argcosh}(t)$$

Recuerda que $\operatorname{argsenh}(t) = \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$ y $\operatorname{argcosh}(t) = \ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)$.